Rees環がCohen-Macaulay環になるための条件について (可換環論の研究)

数理解析研究所講究録
374巻 1980年 75-94

Rees環がCohen-Macaulay環になるための条件について

日大　文理　後藤四郎
都立大　理　下田保博

はじめに

Aはd次元局所環で$\mathfrak{m}$はAの極大イデアルとする。Aのイデアル$\mathfrak{q}$に対して$R(\mathfrak{q}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{q}^n$とおいて$\mathfrak{q}$に関するA上のRees環と呼ぶことにする。$R(\mathfrak{q})$は一変数多項式環$A[X]$の部分環$A[\{aX \mid a \in \mathfrak{q}\}]$と自然に同一視できる。

AがCohen-Macaulayであれば，すべてのパラメーターイデアル$\mathfrak{q}$に対してRees環$R(\mathfrak{q})$もCohen-Macaulayになる（Barshay[1], Goto[2], Valla[12]）。しかしながら，AがCohen-MacaulayでなくてもRees環はCohen-Macaulayになるような例も知られている。たとえば，Hochster-Robertsによる次の例がある。

$$A = k[[S^4, S^3T, ST^3, T^4]], \quad \mathfrak{q} = (S^4, T^4)$$

とすると，$R(\mathfrak{q})$はCohen-Macaulayになる。そこで，パラメーターイデアルの場合にRees環がCohen-Macaulayとなるのはいつかという問題が考えられる。本稿ではこの問いに対する答え

を与えるのがまず1つの目的である。

もう1つの話題は極大イデアルに関するRees環がいつCohen-Macaulayになるかという問題についてである。Hochster-Ratliff [4], Sally [7] は $\mathrm{Proj}(R(\mathfrak{m}))$ が $\mathrm{Spec}(A)$ の閉点の blowing up であり $\mathrm{proj}(G_{\mathfrak{m}}(A))$ が fiber になることを用いて, $\mathrm{proj}(G_{\mathfrak{m}}(A))$ が Cohen-Macaulay ならば $\mathrm{proj}(R(\mathfrak{m}))$ もそうなることを示した。ここでは $R(\mathfrak{m})$ と $G_{\mathfrak{m}}(A)=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ との関係を重視して $R(\mathfrak{m})$ が Cohen-Macaulay になる条件を与えることにする。

§1. パラメーターイデアルに関するRees環の場合

ここでは次の定理を証明するのが目的である。

(1.1) 定理. $\mathfrak{q}=(a_1,\cdots,a_d)$ をAのパラメーターイデアルとする。このとき, 次は同値である。

(1) $R(\mathfrak{q})$ はCohen-Macaulay環である。

(2) Aは次の2つの条件をみたす。

(1-1) $(a_1^{n_1},\cdots,a_i^{n_i}):a_{i+1}^{n_{i+1}}=(a_1^{n_1},\cdots,a_i^{n_i}):\mathfrak{q}$ が $0\leq i\leq d-1$ なる i と, すべての正の整数 $n_1,\cdots,n_{i+1}$ について成り立つ。

(1-2) local cohomology module $H_{\mathfrak{m}}^i(A)$ は $1, d$ 以外の i に対して (0) となる。

上の定理(1.1)を証明するために, まず次の定義から始めよ

う。

(1.2) 定義. Aの任意のイデアル$\mathfrak{a}$に対して$\mathrm{Assh}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(\mathfrak{a})\ ;\ \dim A/\mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{a}\}$とおく。さらに$\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(\mathfrak{a})} \mathfrak{a}(\mathfrak{p})$を$\mathfrak{a}$の準素分解とするとき, $U(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Assh}(\mathfrak{a})} \mathfrak{a}(\mathfrak{p})$と定める。

以下しばらくの間, 定理の(1-1)の条件を仮定しておく。

(1.3) 補題 ([11]). $H^i_\mathfrak{m}(A) = (0)$ $(0 \le i \le d-1)$が成り立つ。

$0 \le j \le d$に対して$\mathfrak{q}_j = (a_1, \dots, a_j)$とおく。このとき,

(1.4) 補題. $\mathfrak{q}_j = U(\mathfrak{q}_j) \cap Q_j$ $(0 \le j \le d)$, ここでQ_jは$\mathfrak{m}$-primary成分である。さらに$U(\mathfrak{q}_j) = (a_1, \dots, a_j) : a_{j+1}$が$0 \le j \le d-1$なる$j$に対して成り立つ。

証明. (1.3)より$\ell_A(H^i_\mathfrak{m}(A)) < \infty$となる。従って[8]のSatz (2.5)により$\mathfrak{q}_j = U(\mathfrak{q}_j) \cap Q_j$が成り立つ。次に$0 \le j \le d-1$なる$j$に対して, $U(\mathfrak{q}_j)$の定義よりa_{j+1}は$U(\mathfrak{q}_j)$の準素成分に属するどんな素イデアルにも含まれない。よって, $(a_1, \dots, a_j) : a_{j+1}$は$U(\mathfrak{q}_j)$に含まれる。逆に$x \in U(\mathfrak{q}_j)$とする。$Q_j$は$\mathfrak{m}$-primaryより$a_{j+1}^n \in Q_j$となる整数$n$が存在する。このとき, $a_{j+1}^n x \in U(\mathfrak{q}_j) \cap Q_j = \mathfrak{q}_j$。よって, $x \in (\mathfrak{q}_j) : a_{j+1}^n = \mathfrak{q}_j : a_{j+1}$となり, 補題がいえた。

(1.5) 補題. $U(\mathfrak{q}_j) \cap \mathfrak{q}^n = \mathfrak{q}_j \mathfrak{q}^{n-1}$が任意の$0 \le j \le d$, $n > 0$について成り立つ。

証明. [3]の補題(4.2)と同様である。

(1.6) 補題. $U(0) = H^0_m(A)$。

証明. $\mathfrak{q} H^0_m(A) = 0$ より $H^0_m(A) \subset (0) : \mathfrak{q} = (0) : a_1 = U(0)$.
逆に $r \in U(0)$ ならば (1.4) より $r \in (0) : a_1 = (0) : \mathfrak{q}$. 今 $\mathfrak{q} \supset m^n$ なる整数 n をとれば, $r \in (0) : m^n \subset H^0_m(A)$.

(1.7) 補題. ① $d \geqq 2$ ならば

$$H^i_m(U(a_1A)) = \begin{cases} H^i_m(A) & i \neq 1 \\ (0) & i = 1 \end{cases}$$

② $d = 1$ ならば, $U(a_1A) = a_1A$ は1次元Cohen-Macaulay A-加群。

証明. ① 次のような完全列が存在する。

(i) $0 \longrightarrow U(0) \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} a_1A \longrightarrow 0$

(ii) $0 \longrightarrow a_1A \xrightarrow{\iota} A \longrightarrow A/a_1A \longrightarrow 0$

(iii) $0 \longrightarrow a_1A \longrightarrow U(a_1A) \longrightarrow U(a_1A)/a_1A \longrightarrow 0$

(iv) $0 \longrightarrow U(a_1A)/a_1A \longrightarrow A/a_1A \longrightarrow A/U(a_1A) \longrightarrow 0$

まず $A \xrightarrow{\varepsilon} a_1A \xrightarrow{\iota} A$ は $\hat{a}_1 : A \xrightarrow{a_1} A$ なる写像と一致すること, また $U(a_1A)/a_1A$ は (1.4) より長さが有限になることに注意する。

$i = 0$ のとき, $H^0_m(U(a_1A)) \subset H^0_m(A) = U(0) = (0) : \mathfrak{q}$ である。今 $x \in H^0_m(A)$ とすると $x\mathfrak{q} = 0$ より $x \in U(a_1A)$。従って $x \in H^0_m(U(a_1A))$ となる。

$i \geqq 2$ のとき, $H^i_m(U(0)) = (0)$ ($i \geqq 1$) に注意すれば, (i)よ

り $H^i_m(A) \cong H^i_m(a_1A)$ $(i \geq 1)$ となる。このとき(iii)から、$H^i_m(U(a_1A)/a_1A) = (0)$ $(i \geq 2)$ より求める結果 $H^i_m(U(a_1A)) \cong H^i_m(a_1A) \cong H^i_m(A)$ $(i \geq 2)$ が得られる。

$i=1$のとき、(iii)より次のような完全列ができる。

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0_m(a_1A) \longrightarrow H^0_m(U(a_1A)) \longrightarrow H^0_m(U(a_1A)/a_1A) & \\ \longrightarrow H^1_m(a_1A) \longrightarrow H^1_m(U(a_1A)) \longrightarrow 0 & \qquad (1\text{-}3) \end{aligned}$$

(i)より $0 \longrightarrow H^0_m(U(0)) \longrightarrow H^0_m(A) \longrightarrow H^0_m(a_1A) \longrightarrow 0$

となるから $H^0_m(U(0)) = H^0_m(A)$ に注意すれば、$H^0_m(a_1A) = (0)$ となる。また(iv)より

$$0 \longrightarrow H^0_m(U(a_1A)/a_1A) \longrightarrow H^0_m(A/a_1A) \longrightarrow H^0_m(A/U(a_1A)) \longrightarrow 0$$

となるが、depth $A/U(a_1A) > 0$ より $H^0_m(A/U(a_1A)) = (0)$。従って $H^0_m(U(a_1A)/a_1A) \cong H^0_m(A/a_1A)$ である。

一方(ii)より

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0_m(a_1A) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & H^0_m(A) \arrow[r] & H^0_m(A/a_1A) \arrow[r] & H^1_m(a_1A) \arrow[r, "\simeq"] & H^1_m(A) \\ & (0) & & & H^1_m(A) \arrow[u, "\wr"] \arrow[ur, "a_1"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

今 $a_1 \cdot H^1_m(A) = (0)$ に注意すれば、

$$0 \longrightarrow H^0_m(A) \longrightarrow H^0_m(A/a_1A) \longrightarrow H^1_m(a_1A) \longrightarrow 0$$

が得られる。このとき $H^1_m(a_1A) \cong H^1_m(A)$ より、結局

$$0 \longrightarrow H^0_m(A) \longrightarrow H^0_m(A/a_1A) \longrightarrow H^1_m(A) \longrightarrow 0$$

が得られる。従って $l_A(H^0_m(A/a_1A)) = l_A(H^0_m(A)) + l_A(H^1_m(A))$.

(1−3)において長さを調べると

$$\ell_A(H^1_m(U(a_1A)))+\ell_A(H^0_m(U(a_1A)/a_1A))$$
$$=\ell_A(H^1_m(A))+\ell_A(H^0_m(U(a_1A)))$$
$$=\ell_A(H^1_m(A))+\ell_A(H^0_m(A))$$
$$=\ell_A(H^0_m(A/a_1A))。$$

従って $\ell_A(H^1_m(U(a_1A)))=0$ より $H^1_m(U(a_1A))=(0)$.

(2) $U(a_1A)=a_1A$ は明らか。$x\in U(a_1A)$ で $a_1x=0$ とする。$x=a_1y$ と表わせる。このとき，$a_1^2y=0$．よって $y\in (0):a_1^2=(0):a_1$．∴ $x=a_1y=0$．従って $U(a_1A)$ は1次元 Cohen-Macaulay A−加群である。

系として次の2つのことが成り立つ。

(1.8) 系. $U(a_1A)$ が Cohen-Macaulay A−加群であるためには $d=1$ か $d\geq 2$ で $H^i_m(A)=(0)$ $(i\neq 1,d)$ が成り立つことが必要充分である。

(1.9) 系. $d=2$ で depth $A>0$ ならば $U(a_1A)$ は Cohen-Macaulay.

(1.10) 補題 ([3]) 次のような $R(q)$−加群の完全列が存在する。

$$0\longrightarrow {}_hU(a_1A)\longrightarrow R(q)/(a_1X)\longrightarrow R(q+U(a_1A)/U(a_1A))\longrightarrow 0$$

ここで h は $R(q)\longrightarrow A$ への自然な projection であって，${}_hU(a_1A)$ は h を通じて $U(a_1A)$ を $R(q)$−加群と見なしたものを表わす。

(1.11) 系. depth $A>0$ ならば，depth $R(q)\geq \min\{3,d+1\}$.

証明. $d=1$ のとき, $R(\mathfrak{q}) \cong A[X]$ より $\operatorname{depth} R(\mathfrak{q}) = 2$ である。$d \geqq 2$ とする。$\operatorname{depth} A/U(a_1A) > 0$ より, d に関する帰納法によれば, $\operatorname{depth} R(\mathfrak{q}+U(a_1A)/U(a_1A)) \geqq 2$. 一方 (1.7) により $\operatorname{depth} U(a_1A) \geqq 2$ となるから, (1.10) の完全列により, $\operatorname{depth} R(\mathfrak{q}/(a_1X)) \geqq 2$. 結局 $\operatorname{depth} R(\mathfrak{q}) \geqq 3$ となる。

(1.12) 系. $d=2$ で $\operatorname{depth} A > 0$ ならば $R(\mathfrak{q})$ は Cohen-Macaulay.

(1.13) 補題. $d \geqq 3$ かつ $\operatorname{depth} A > 0$ とする。$\bar{A} = A/U(a_1A)$ とおく。このとき,

$$\operatorname{depth} U(a_2\bar{A}) = \begin{cases} \operatorname{depth} U(a_1A) - 1 & (\operatorname{depth} U(a_1A) \geqq 3) \\ 2 & (\operatorname{depth} U(a_1A) = 2) \end{cases}$$

証明.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & a_1A \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[r] & A/a_1A \arrow[r] & 0 \\ & & A \arrow[ul, "\varepsilon"] \arrow[u, "a_1"'] & & \end{tikzcd}$$

なる完全列に対して $H^i_{\mathfrak{m}}(\cdot)$ を適用すれば, $a_1 H^i_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$ に注意すると, (1.7) の結果を合わせて,

$$0 \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(A) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(A/a_1A) \longrightarrow H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(A) \longrightarrow 0 \quad (1\text{-}4)$$

なる完全列が存在する。(ここで $i \leqq d-2$). 同じく次の完全列,

$$0 \longrightarrow U(a_1A)/a_1A \longrightarrow A/a_1A \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow 0$$

に $H^i_{\mathfrak{m}}(\cdot)$ を適用すると $H^i_{\mathfrak{m}}(U(a_1A)/a_1A) = (0)$ $(i \geqq 1)$ より

$H^i_{\mathfrak{m}}(A/a_1A) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(\bar{A})$ $(i \geqq 1)$ が得られる。

depth $\mathcal{O}(m, A) = 2$ ならば (1.7) より $H^2_m(A) \neq 0$. 従って (1-4) より $H^2_m(\mathfrak{a}_{m,\mathfrak{q}}) = H^2_m(\bar{A}) \neq 0$. (1.7) を使えば, $H^2_m(\mathcal{O}(m_2 \bar{A})) \neq 0$. 従って depth $\mathcal{O}(m_2 \bar{A}) \leqq 2$. 一方 depth $\bar{A} > 0$ より, 再び (1.7) を用いて depth $\mathcal{O}(m_2 \bar{A}) \geqq 2$ がいえる。よって depth $\mathcal{O}(m_2 \bar{A}) = 2$ である。

depth $\mathcal{O}(m, A) = d \geqq 3$ のとき, (1.7) から, $H^d_m(A) \neq 0$ かつ $H^i_m(A) = 0$ $(i < d)$. よって (1-4) より $H^{d-1}_m(\mathfrak{a}_{m,A}) \neq 0$ で $H^i_m(\mathfrak{a}_{m,A}) = 0$ $(i < d-1)$. 従って再び (1.7) により depth $\mathcal{O}(m_2 \bar{A}) = d-1$ となる。

(1.14) 命題 $d \geqq 3$ で depth $A > 0$ とする。このとき,

$$\operatorname{depth} R(\mathfrak{q}) = \operatorname{depth} \mathcal{O}(m, A) + 1$$

となる。

証明. depth $\mathcal{O}(m, A) = d$ とおく. $d = 2$ のとき, depth $\mathcal{O}(m_2 \bar{A}) = 2$ より, d に関する帰納法により, depth $R(\mathfrak{q} + \mathcal{O}(m, A)/\mathcal{O}(m, A)) = 3$. このとき, (1.10) により depth $R(\mathfrak{q})/(a_1 x) = 2$. よって depth $R(\mathfrak{q}) = 3$ となる。

$d \geqq 3$ とする。depth $R(\mathfrak{q} + \mathcal{O}(m, A)/\mathcal{O}(m, A)) = $ depth $\mathcal{O}(m_2 \bar{A}) + 1 = (d-1) + 1 = d$. よって (1.10) から depth $R(\mathfrak{q})/(a_1 x) = d$. 従って depth $R(\mathfrak{q}) = d+1$ となる。

(1.15) 系. (1-1) の仮定のもとで, 次は同値になる。

(1) $R(\mathfrak{q})$ は Cohen-Macaulay 環

(2) $U(\mathfrak{a}, A)$ は Cohen-Macaulay A-加群

(3) $H_{\mathfrak{m}}^i(A) = (0)$ $(i \neq 1, d)$

以上のことにより，定理の証明を完結させるには $R(\mathfrak{q})$ が Cohen-Macaulay ならば条件 (1-1) がみたされることを云えば充分である。そのために今 $M = (\mathfrak{m}, a_1X, \cdots, a_dX)$ を $R(\mathfrak{q})$ の斉次極大イデアルとおく。

(1.16) 補題 ([3]). $a_1, a_2+a_1X, \cdots, a_d+a_{d-1}X, a_dX$ は $R(\mathfrak{q})_M$ のパラメーター系である。さらに $R(\mathfrak{q})_M$ が Cohen-Macaulay になる必要充分条件は $a_1, a_2+a_1X, \cdots, a_d+a_{d-1}X, a_dX$ が $R(\mathfrak{q})_M$-列になることである。

(1.17) 補題. $R(\mathfrak{q})$ が Cohen-Macaulay ならば，条件 (1-1) が成り立つ。

証明. まず $(a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_i^{n_i} = (a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_i$

$$= (a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_j \quad (1 \leq i \leq j \leq d,\ n_1, \cdots, n_i \text{ は自然数})$$

を示そう。$I = (a_1^{n_1}, (a_1X+a_2)^{n_2}, \cdots, (a_{i-2}X+a_{i-1})^{n_{i-1}}, a_iX)$ とおく。r を $(a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_i^{n_i}$ の元とする。$ra_i^{n_i} = \sum_{k=1}^{i-1} A_k a_k^{n_k}$ と表わせる。

$$ra_i(a_dX+a_i)^{n_i} = ra_i\left(\sum_{l=0}^{n_i}\binom{n_i}{l}(a_dX)^{n_i-l}a_i^l\right) = ra_i\left(\sum_{l=0}^{n_i-1}\binom{n_i}{l}(a_dX)^{n_i-l}a_i^l + a_i^{n_i}\right) = ra_d\sum_{l=0}^{n_i-1}\binom{n_i}{l}(a_dX)^{n_i-l-1}(a_iX) + ra_i^{n_i+1}$$

$$\equiv a_i\left(\sum_{k=1}^{i-1}A_k a_k^{n_k}\right) \equiv a_i(a_1X+a_2)^{n_2} - a_i\left(\sum_{l=0}^{n_2-1}\binom{n_2}{l}(a_1X)^{n_2-l}a_2^l\right) + a_i\sum_{k=3}^{i-1}A_k a_k^{n_k} \equiv a_i\left(\sum_{k=3}^{i-1}A_k a_k^{n_k}\right) \equiv \cdots \equiv 0 \pmod{I}.$$

$(a_1X+a_i)^{n_i}$ は $(R(X)/I)_M$ 一列より $ra_i \in IR(X)_M$ である。よって $f\cdot ra_i \in I$ $(f \in R(X)\setminus M)$. f の次数 0 の係数は A の単元より $f\cdot ra_i$ の次数 0 の係数を考えると、$ra_i \in (a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}})$.
従って最初の等式が証明された。第2の等式も同様に証明できる。さらに上の等式は $a_1, \cdots, a_i$ の任意の置換 $a_{\pi(1)}, \cdots, a_{\pi(i)}$ (π は対称群 S_i の元) に対しても成り立つことに注意する。

さて (1-1) を証明することにしよう。r を $(a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_i^{n_i}$ の元とする。a_k $(1 \leqq k \leqq i-1)$ をとる。$n_k=1$ ならば、

$ra_k \in (a_1^{n_1}, \cdots, a_k^{n_k}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}})$ は明らかである。$n_k>1$ とする。

$ra_i = \sum_{l=1}^{i-1} \lambda_l a_l^{n_l}$ と上の主張から表わすことができる。従って

$$\lambda_k a_k^{n_k} \in (a_1^{n_1}, \cdots, \widehat{a_k^{n_k}}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}, a_i).$$

よって、 $\lambda_k a_k \in (a_1^{n_1}, \cdots, \widehat{a_k^{n_k}}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}, a_i)$.

そこで $r-\lambda_k a_k^{n_k-1} \in (a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_i = (a_1^{n_1}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}}) : a_k$.

従って $ra_k \in (a_1^{n_1}, \cdots, a_k^{n_k}, \cdots, a_{i-1}^{n_{i-1}})$. よって (1-1) が成り立つ。

定理よりいくつかの系が導ける。

(1.18) 定義 ([10]). A の元の列 $a_1, \cdots, a_r$ が weakly regular sequence であるとは、

$$(a_1, \cdots, a_{i-1}) : a_i = (a_1, \cdots, a_{i-1}) : m$$

が $1 \leqq i \leqq r$ に対して成り立つときに云う。A が Buchsbaum 環であるとは、すべてのパラメーター系が weakly regular sequence をなすときに云うことにする。このとき、

(1,19) 系([3]). 次の条件は同値である。

(1) すべてのパラメーターイデアル q に対して $R(q)$ は Cohen-Macaulay である。

(2) A は Buchsbaum 環であって、かつ $H^i_m(A)=(0)$ $(i\neq 1, d)$.

証明. [10] の定理5により、2組のパラメーター系

$a_1,\cdots,a_{d-1},a_d$; $a_1,\cdots,a_{d-1},a_d'$ に対して

$$(a_1,\cdots,a_{d-1}):a_d = (a_1,\cdots,a_{d-1}):a_d'$$

が成り立つことと A は Buchsbaum 環になることは同値である。

今(1)が成り立つならば、定理の(1-1)がすべてのパラメーター系について云える。このとき容易に上の条件が成り立つことが示される。よって(1)から(2)が云える。

逆に A が Buchsbaum 環ならば、その定義により(1-1)の条件をすべてのパラメーターイデアルはみたすから、(2)から(1)がいえる。

(1,20) 系. r を $0\leqq r\leqq d$ なる整数とする。$a_{r+1},\cdots,a_d$ を A のパラメーター系の一部をなす元の列とし、$q=(a_{r+1},\cdots,a_d)$ とおく。このとき次の(1),(2)は同値である。

(1) Rees 環 $R(q)$ は Cohen-Macaulay である。

(2) $a_1,\cdots,a_r$ を $a_1,\cdots,a_r,a_{r+1},\cdots,a_d$ がパラメーター系をなす元の列とする。このとき次の条件が成り立つ。

(i) $a_1,\cdots,a_r$ は A-列である。

(ii) すべての自然数 n に対して A/q^n は Cohen-Macaulay。

(iii) $A/(a_1,\cdots,a_r)$ は定理(1.4)の(2)をみたす。

証明. (i)⇒(ii)： $R(q)$ が Cohen-Macaulay ならば, $a_1,\cdots,a_r,$ $a_{r+1}, a_{r+2}+a_{r+1}X, \cdots, a_d+a_{d-1}X, a_dX$ は $R(q)_M$-列をなすことに注意する。このとき，まず $a_1,\cdots,a_r$ は A-列 になることが容易にわかる。さらに

$$(1\text{-}5) \quad (a_1,\cdots,a_i)\cap q^n=(a_1,\cdots,a_i)q^n$$

($1\leqq i\leqq r$, n は自然数) が成り立つ。実際, c を $(a_1,\cdots,a_i)\cap q^n$ の元とする。$c=\sum_{j=1}^{i} A_j a_j$ と表わせ。

$$a_{r+1}^n(cX^n)=\sum_{j=1}^{i} a_j(A_j a_{r+1}^n X^n).$$

$a_1,\cdots,a_i, a_{r+1}^n$ は $R(q)_M$-列 より, $cX^n\in(a_1,\cdots,a_i)R(q)_M$. 従って $c\in(a_1,\cdots,a_i)q^n$.

次に $a_1,\cdots,a_r$ が A/q^n-列をなすことを示す.

$$xa_i\in(a_1,\cdots,a_{i-1})+q^n$$

が成り立つとせよ。$xa_i=\sum_{j=1}^{i-1} y_j a_j+y$ ($y\in q^n$) と表わせる。このとき, $xa_i-\sum_{j=1}^{i-1} y_j a_j\in(a_1,\cdots,a_i)\cap q^n=(a_1,\cdots,a_i)q^n$ ((1-5)から成り立つ). よって $xa_i-\sum_{j=1}^{i-1} y_j a_j=\sum_{j=1}^{i} z_j a_j$ ($z_j\in q^n$). $a_1,\cdots,a_i$ は A-列であるから, $x-z_i\in(a_1,\cdots,a_{i-1})$. 従って $x\in(a_1,\cdots,a_{i-1})+q^n$. このことにより $a_1,\cdots,a_r$ は A/q^n-列. A/q^n の次元は A/q と同じで r となるから A/q^n は Cohen-Macaulay.

さて, $R(q)$ から $R(q+(a_1,\cdots,a_i)/(a_1,\cdots,a_i))$ への自然な写像の核

は[12]の命題(1.1)により $(a_1,\dots,a_i)A[X]\cap R(\mathfrak{q})$ になる。ところで(1-5)によってこのイデアルは $(a_1,\dots,a_i)R(\mathfrak{q})$ に一致する。従って、$R(\mathfrak{q})/(a_1,\dots,a_r)R(\mathfrak{q}) \cong R(\mathfrak{q}+(a_1,\dots,a_r)/(a_1,\dots,a_r))$ となり $\mathfrak{q}$ がパラメーターイデアルである場合に帰着できる。このときは定理(1.1)から条件(iii)が成り立つ.

(2)⇒(1): (1-5)の式が成り立つことを云う。$i=1$ とする。$a_1,\dots,a_r$ は $A/\mathfrak{q}^n$-列になるから, $\lambda a_1\in(a_1)\cap\mathfrak{q}^n$ とすると, $\lambda\in\mathfrak{q}^n$. $i>1$ として $i-1$ 以下では成り立つものとする。x を $(a_1,\dots,a_i)\cap\mathfrak{q}^n$ の元とする。$x=\sum_{j=1}^{i}\lambda_j a_j$ とせよ。$\lambda_i a_i\in\mathfrak{q}^n+(a_1,\dots,a_{i-1})$ より $\lambda_i\in(a_1,\dots,a_{i-1})+\mathfrak{q}^n$. よって $\lambda_i=\sum_{k=1}^{i-1}t_k a_k+t$ $(t\in\mathfrak{q}^n)$ と表わせる。このとき,

$$x-ta_i=\sum_{k=1}^{i-1}(\lambda_k+t_k a_i)a_k\in\mathfrak{q}^n\cap(a_1,\dots,a_{i-1})=(a_1,\dots,a_{i-1})\mathfrak{q}^n.$$

そこで $x-ta_i=\sum_{k=1}^{i-1}z_k a_k$ $(z_k\in\mathfrak{q}^n)$。よって $x\in(a_1,\dots,a_i)\mathfrak{q}^n$。

この(1-5)の式により, $a_1,\dots,a_r$ は $R(\mathfrak{q})$-列をなすことが容易にわかり, (1)⇒(2)の証明から,

$$R(\mathfrak{q})/(a_1,\dots,a_r)R(\mathfrak{q})\cong R(\mathfrak{q}+(a_1,\dots,a_r)/(a_1,\dots,a_r))$$

が成立する。従って(iii)より右辺は Cohen-Macaulay となるから $R(\mathfrak{q})$ も Cohen-Macaulay が云える。

(1.21)系([9]). r を $0<r<d$ なる整数とする。このとき次の(1), (2)は同値である。

(1) A は Cohen-Macaulay である。

(2) 長さが$d-r$のパラメーター系の一部をなす元の列で生成された任意のイデアル$\mathfrak{q}$に対して，Rees環$R(\mathfrak{q})$はCohen-Macaulay.

証明. (1)ならば(2)が成り立つのはよく知られている。([1]参照)。

(2)⇒(1): $\mathfrak{q}=(a_{r+1},\cdots,a_d)$とおく。$a_1,\cdots,a_r$を$a_1,\cdots,a_r,a_{r+1},\cdots,a_d$がパラメーター系となる元の列とすると，(1.20)より$a_1,\cdots,a_r$はA−列をなす。今$\bar{A}=A/(a_1^2,\cdots,a_r^2)$とおく。$\bar{A}$の任意のパラメーター系$\bar{b}_{r+1},\cdots,\bar{b}_d$をとると，$b_{r+1},\cdots,b_d$はAのパラメーター系の一部をなす。そこで$\mathfrak{q}'=(b_{r+1},\cdots,b_d)$とおくと$R(\mathfrak{q}')$は仮定によりCohen-Macaulayとなる。このとき，(1.20)により$R((\bar{b}_{r+1},\cdots,\bar{b}_d))=R(\mathfrak{q}')/(a_1^2,\cdots,a_r^2)R(\mathfrak{q}')$が成り立つので$R((\bar{b}_{r+1},\cdots,\bar{b}_d))$もCohen-Macaulayになる。そこで系(1.19)により$\bar{A}$はBuchsbaum環となる。従って，Aもそうである。([13]の定理による)。また$\operatorname{depth} A\geq 2$なることもわかるので，このときは[9]と同様な証明により，$\operatorname{depth} R(\mathfrak{q})=\operatorname{depth} A+1$がいえて，AはCohen-Macaulayとなる。

§2. 極大イデアルに関するRees環の場合.

ここではAはd次元局所環で$\mathfrak{m}$をその極大イデアルとする. $A/\mathfrak{m}$は無限体と仮定しておく。このとき，

(2.1) 定理. AはCohen-Macaulayと仮定する。次の条件は同

値である。

(1) $R(\mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay である。

(2) $G_{\mathfrak{m}}(A)$ は Cohen-Macaulay であって，$\mathfrak{m}^d=(a_1,\cdots,a_d)\mathfrak{m}^{d-1}$ をみたす $\mathfrak{m}$ の元の列 $a_1,\cdots,a_d$ が存在する。

この結果の詳しい証明は後藤－下田の 'On Rees algebras over local rings' という論文で与える予定であるので，ここではその概略を述べることにする。

(2.2) 定義 ([6])．任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{a}^t=\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{t-1}$ となる $\mathfrak{a}$ に含まれるイデアル $\mathfrak{b}$ のことを $\mathfrak{a}$ の reduction イデアルと呼ぶ。さらに $\mathfrak{a}$ の reduction で $\mathfrak{b}$ に真に含まれるものがないときに $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{a}$ の minimal reduction と呼ぶことにする。もし $\mathfrak{k}_{\mathfrak{m}}$ が無限体ならば，任意のイデアルに対して必ず minimal reduction が存在して，その生成元の個数は A の次元を越えない。

上の定義により，$\mathfrak{q}=(a_1,\cdots,a_d)$ なる $\mathfrak{m}$ の minimal reduction が存在する。このとき，$G_{\mathfrak{m}}(A)$ が Cohen-Macaulay となることと，

$$(2-1)\qquad (a_1,\cdots,a_i)\cap\mathfrak{m}^n=(a_1,\cdots,a_i)\mathfrak{m}^{n-1}$$

$(1\leqq i\leqq d$，n は自然数$)$ が成り立つことは同値である。

$R(\mathfrak{m})=A[\{aX \mid a\in\mathfrak{m}\}]$ としたとき，$M=(\mathfrak{m},\{aX \mid a\in\mathfrak{m}\})$ を $R(\mathfrak{m})$ の斉次極大イデアルとする。さらに，

$$f_i=a_i+a_{i-1}X\quad(1\leqq i\leqq d+1,\ a_0=a_{d+1}=0)$$

とおく。このとき，

(2.3) 補題. $f_1, \cdots, f_{d+1}$ は $R(\mathfrak{m})_M$ のパラメーター系である。

また Matijevic–Roberts [5] の定理より

(2.4) 補題. $R(\mathfrak{m})$ が Cohen–Macaulay である必要充分条件は $f_1, \cdots, f_{d+1}$ が $R(\mathfrak{m})_M$-列となることである。

(2.5) 補題. u を $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ での正則元とする。このとき，次の次数つき $R(\mathfrak{m})$-加群の完全列が存在する。

(2-2) $\quad 0 \longrightarrow uA \longrightarrow R(\mathfrak{m})/(uX) \longrightarrow R(\mathfrak{m})/(uA) \longrightarrow 0$

証明. $f : R(\mathfrak{m}) \longrightarrow R(\mathfrak{m})/(uA)$ を自然な写像とする。I を f の核とおく。$uX \in I$ である。今 $z = bX^n$ ($b \in \mathfrak{m}^n$) を I の元とする。$n \geq 1$ とせよ。(2-1) より $b \in \mathfrak{m}^n \cap uA = u\mathfrak{m}^{n-1}$。よって $b = ur$ ($r \in \mathfrak{m}^{n-1}$) とおける。このとき $z = (uX)(rX^{n-1})$。従って $z \in (uX)$。$n = 0$ ならば，$b \in uA$。よって $I = (uA, uX)$。ゆえに上の完全列が成り立つ。

以下しばらくの間，$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ は Cohen–Macaulay であると仮定する。このとき，

(2.6) 補題. $f_1, \cdots, f_d$ は $R(\mathfrak{m})$-列。

証明. d についての帰納法. $d = 1$ ならば明らか。$d \geq 2$ とする。$f_1, \cdots, f_i$ は $R(\mathfrak{m})$-列だが $f_1, \cdots, f_{i+1}$ はそうならないような i を最小にとる。今 $i < d$ とせよ。このとき，

$P \in \mathrm{Ass}_{R(\mathfrak{m})}(R(\mathfrak{m})/(f_1, \cdots, f_i))$ で $f_{i+1} \in P$ となるものをとる。(2-2) で $u = f_{i+1}$ とおくと

$$0 \longrightarrow {}_iA \longrightarrow R(\mathfrak{m})/(a_{i+1}X) \longrightarrow R(\mathfrak{m}/a_{i+1}A) \longrightarrow 0 .$$

$a_1, \cdots, a_i$はA－列であるからAを$R(\mathfrak{m})$－加群とみても，$f_1, \cdots, f_i$はA－列．また帰納法の仮定より，$f_1, \cdots, f_i$は$R(\mathfrak{m}/a_{i+1}A)$列。従って$a_{i+1}X, f_1, \cdots, f_i$は$R(\mathfrak{m})$－列となるから，$a_{i+1}X \in P$。

$\mathfrak{p} = P \cap A$とおく。$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ならば，$R(\mathfrak{m})_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}[X] \ni X$より，$PR(\mathfrak{m})_{\mathfrak{p}} \ni a_{i+1}X$となる。ゆえに$P \ni a_{i+1}X$だから矛盾である。従って$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$。そこで$P \supset \mathfrak{m}R(\mathfrak{m}) + (a_1X, \cdots, a_iX)$となる。このとき，$\operatorname{depth} R(\mathfrak{m})_P > i$を示す。これを証明するために(2－2)の列を$a = a_1, \cdots, a_i$までの元の列に用いて次の$R(\mathfrak{m})$加群の完全列を作る。このとき各$j$ $(0 \leqq j \leqq i)$に対して$\operatorname{depth} R(\mathfrak{m}/(a_1, \cdots, a_j))_P \geqq i - j + 1$が容易に示すことができる。従って，$\operatorname{depth} R(\mathfrak{m})_P > i$となるが，これはPのとり方に反する。よって，$i \geqq d$となり，$f_1, \cdots, f_d$は$R(\mathfrak{m})$－列。

さて，定理(2.1)の(2)⟹(1)を示すには次の式

(2－3)　$(f_1, \cdots, f_d) : f_{d+1} = (f_1, \cdots, f_d, \mathfrak{m}^d)$

を云えばよい。なぜなら，もしこれが示されたとすると，$\mathfrak{m}^d = (a_1, \cdots, a_d)\mathfrak{m}^{d-1}$より$\mathfrak{m}^d \subset (f_1, \cdots, f_d)$が容易に示されて，$f_1, \cdots, f_d, f_{d+1}$は$R(\mathfrak{m})$－列．つまり$R(\mathfrak{m})$はCohen－Macaulayとなる。

(2－3)の式は次の2つの補題を使ってValla の証明方法を用いることにより証明される。

(2.4)　補題．$(f_1, \cdots, f_i, a_2) : f_{i+1} = (f_1, \cdots, f_i, a_2)$　$(2 \leqq i < d)$

(2.8) 補題. $(f_1,\cdots,f_i):\mathfrak{a}_2=(\mathfrak{m},a_1X,\cdots,a_{i-1}X)$ $(2\leqq i\leqq d)$.

最後に, 定理の (1) ⇒ (2) を云うことにする。(2) を云うには (2-1) より次の2つの補題が示されれば充分である。

(2.9) 補題. $R(\mathfrak{m})$が Cohen-Macaulay ならば, $\mathfrak{m}^d=(a_1,\cdots,a_d)\mathfrak{m}^{d-1}$.

この証明は $f_1,\cdots,f_{d+1}$ が $R(\mathfrak{m})_M$-列をなすことを用いるとできる。

(2.10) 補題. $R(\mathfrak{m})$ が Cohen-Macaulay ならば, (2-1) が成立.

この証明には, $a_1X, a_1-a_2X,\cdots,a_{i-1}-a_iX,\cdots,a_d$ が $R(\mathfrak{m})_M$-列をなすことを用いればよい。

注. このシンポジウム以後に得られた結果をあげておく。

① パラメーターイデアルの Rees 環 $R(\mathfrak{q})$ については, $R(\mathfrak{q})$ が Cohen-Macaulay になる時, そのタイプは定まり, $R(\mathfrak{q})$ が Gorenstein になる条件が求まる。ring B に対して $r(B)$ で B のタイプを表わすことにする。

定理. $R(\mathfrak{q})$ が Cohen-Macaulay とする。

$$r(R(\mathfrak{q}))=(d-1)\cdot(K_A\text{の生成元の個数})+\dim_{A/\mathfrak{m}}[0:\mathfrak{m}]_{H^d_\mathfrak{m}(A)}.$$

ここで K_A は A の canonical module.

とくに $R(\mathfrak{q})$ が Gorenstein 環 ⟺ $d\leqq 2$ かつ A は Gorenstein 環.

② 極大イデアルの場合に $R(\mathfrak{m})$ が Gorenstein になる条件は,

定理. 次は同値である。

(ii) $R(m)$ は Gorenstein

(2) (i) $G_m(A)$ は Gorenstein

(ii) $red(A) = \min\{i \mid m^i = q m^{i-1}$ (q はパラメーターイデアル)$\}$ とおくとき, $red(A) = \max\{\lambda-1, 1\}$ をみたす。

文　献

[1] J. Barshay, Graded algebras of powers of ideals generated by A-sequences, J. Algebra 25 (1973), 90-99.

[2] S. Goto, On the Rees algebras of the powers of an ideal generated by a regular sequence, Proceedings of the Institute of Natural Sciences, Nihon University, 13 (1978), 1-11.

[3] S. Goto and Y. Shimoda, On Rees algebras over Buchsbaum rings, preprint.

[4] M. Hochster and L. J. Ratliff, Jr., Five theorems on Macaulay rings, Pac. J. Math. 44 (1973), 147-172.

[5] J. Matijevic and P. Roberts, A conjecture of Nagata on graded Cohen-Macaulay rings, J. Math. Kyoto Univ. 14 (1974), 125-128.

[6] D. G. Northcott and D. Rees, Reductions of ideals in local rings, Proc. Camb. Phil. Soc. 50 (1954), 145-158.

[27] J. D. Sally, Cohen-Macaulay local rings of maximal embedding dimension, to appear in J. Algebra.

[28] P. Schenzel, N. V. Trung, and N. T. Cuong, Verallgemeinerte Cohen-Macaulay-Moduln, Math. Nachr. 85 (1978), 57-73.

[29] Y. Shimoda, On Rees algebras of ideals generated by a subsystem of parameters, preprint.

[30] J. Stückrad and W. Vogel, Eine Verallgemeinerung der Cohen-Macaulay Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie, J. Math. Kyoto Univ., 13 (1973) 513-528.

[31] ———, Toward a theory of Buchsbaum singularities, Amer. J. Math., 100 (1978), 727-746.

[32] G. Valla, Certain graded algebras are always Cohen-Macaulay, J. Algebra, 42 (1976), 537-548.

[33] W. Vogel, A non-zero-divisor characterization of Buchsbaum modules, preprint.